Թեմա 1

Տոպոլոգիան առաջին հայացքից. տոպոլոգիական հատկություններ և տոպոլոգիական ինվարիանտներ, տոպոլոգիան որպես աքսիոմատիկ տեսություն: Տարբեր հարթաչափական երկրաչափություններ. պատկերների հավասարությո՞ւն, թե՞ համարժեքություն: Երկրաչափությունները և դրանց հիմքում ընկած ձևափոխությունների խմբերը, տոպոլոգիան որպես սահմանային երկրաչափություն:

Տոպոլոգիան երկրաչափության բաժին է, որն ուսումնասիրում է պատկերների այն հատկությունները, որոնք պահպանվում են պատկերների անընդհատ ձևափոխությունների դեպքում: Այդպիսի հատկությունները կոչվում են պատկերների տոպոլոգիական հատկություններ:

Երբ ասում են, որ X երկրաչափական պատկերը ստացվում է Y երկրաչափական պատկերի անընդհատ ձևափոխությունով, ապա ենթադրվում է, որ

1. հաստատվում է որոշակի h փոխմիարժեք (մեկը մեկին) համապատասխանություն X և Y պատկերների միջև (մասնավորապես սա նշանակում է, որ X և Y պատկերների կետերի քանակությունները պիտի լինեն նույնը);

2. եթե X պատկերի որևէ երկու x_1 և x_2 կետեր բավականաչափ մոտիկ են միմյանց X-ում, ապա h-ի միջոցով նրանց համապատասխանեցված y_1 և y_2 կետերը նույնպես պետք է լինեն բավականաչափ մոտիկ Y-ում և հակառակը:

Տոպոլոգիայում երկրաչափական պատկերները կոչվում են տոպոլոգիական տարածություններ, իսկ 1-2 պայմաններին բավարարող տոպոլոգիական տարածությունները կոչվում են միմյանց տոպոլոգորեն համարժեք կամ հոմեոմորֆ տարածություններ: Այս դեպքում h փոխմիարժեք համապատասխանությունը կոչվում է հոմեոմորֆիզմ X-ի և Y-ի միջև:

Բերենք հոմեոմորֆիզմների, հոմեոմորֆ և ոչ հոմեոմորֆ տարածությունների մի քանի հասարակ օրինակներ:

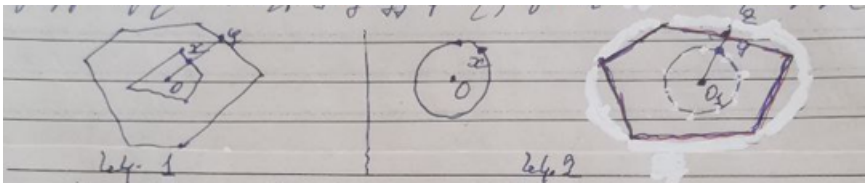
Օրինակ 1: Պարզ է, որ մի կետից կազմված որևէ $\{x\}$ պատկեր չի կարող լինել հոմեոմորֆ որևէ $[a;b]$ հատվածի, քանի որ վերջինս կազմված է անթիվ քանակով կետերից:

Հարց է առաջանում. իսկ հոմեոմո՞րֆ են արդյոք որևէ երկու $[a;b]$ և $[c;d]$ հատվածներ: Մասնավոր դեպքում, երբ օրինակ $[a,b]=[1;3]$, $[c;d]=[1;5]$, ունենք $[1;3]\subset[1;5]$ ներդրում, որից կարելի է եզրակացնել, որ $[1;3]$ հատվածում կետերն ավելի քիչ են $[1;5]$ ինտերվալի կետերից, ուստի դրանք հոմեոմորֆ չեն: Բայց մյուս կողմից

հեշտ է տեսնել, որ $h(x) = \dfrac{d-c}{b-a}(x-a)+c$ գծային ֆունկցիան փոխմիարժեք և անընդհատ $[a;b]$ հատվածը ձևափոխում է $[c;d]$ հատվածին: Հետևաբար $[a;b]$ և $[c;d]$ հատվածները հոմեոմորֆ են:

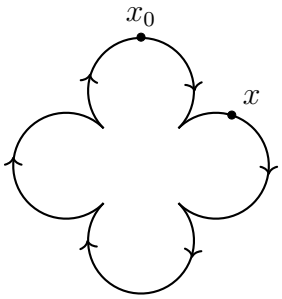
Այս օրինակը ուսանելի է նրանով, որ ցույց է տալիս. բազմության կետերի քանակություն հասկացությունը կարիք ունի հստակեցման:

Օրինակ 2: Ցանկացած երկու ուռուցիկ բազմանկյուն հոմեոմորֆ են միմյանց: Իրոք, նկար 1-ում պատկերված քառանկյուն և վեցանկյուն բազմանկյունների դեպքում O կետից դուրս եկող ճառագայթները որոշում են $x \mapsto y$ և $y \mapsto x$ փոխմիարժեք անընդհատ համապատասխանություններ այդ բազմանկյունների կետերի միջև: Հեշտ է նաև ցույց տալ, որ հոմեոմորֆ են նկար 2-ում պատկերված

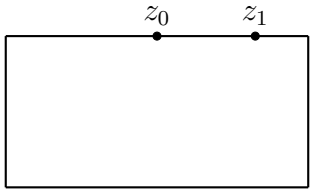


շրջանագիծն ու հնգանկյուն բազմանկյունը: Այս դեպքում կարելի է օրինակ հոմեոմորֆիզմ կառուցել երկու քայլով. նախ շրջանագծի x կետին համապատասխանեցնենք օժանդակ շրջանագծի (որն ստացվում է շրջանագծի զուգահեռ տեղափոխումով) y կետը և այնուհետև y կետին համապատասխանեցնենք O_1y ճառագայթի հատման z կետը բազմանկյան հետ: Արդյունքում ստանում ենք պահանջվող $x \mapsto z$ փոխմիարժեք անընդհատ համապատասխանություն:

Օրինակ 3: Դիտարկենք ստորև նկ. 3-ում պատկերված երկու L_1 և L_2 գծապատկերներ.



L_1



L_2

Դրանք նույնպես հոմեոմորֆ են: Բայց այս դեպքում հազիվ թե հնարավոր է կառուցել հոմեոմորֆիզմ նախորդ օրինակներում բերված եղանակներով:

Նկարագրենք այսօրինակ գծապատկերների միջև հոմեոմորֆիզմ կառուցելու մի ավելի ընդհանուր մեթոդ: Այդ նպատակով ընտրենք մեկական x_0, y_0 կետեր L_1-ի, L_2-ի վրա և շրջապտույտի մեկական ուղղություններ L_1 և L_2 գծերի վրա:

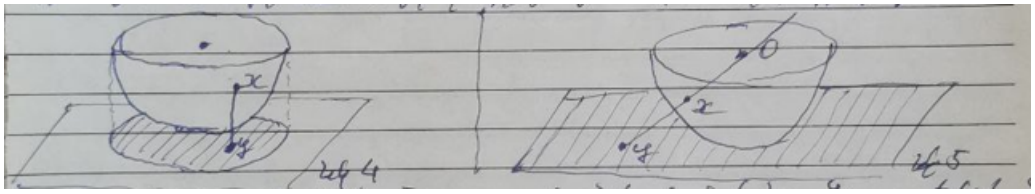
Նշենք որ գիծն, իր վրա ընտրված շրջապտույտի ուղղության հետ միասին կոչվում է **կողմնորոշված գիծ**: Յուրաքանչյուր գիծ կարելի է կողմնորոշել երկու եղանակով՝ ընտրելով երկայնքով շարժվելու երկու ուղղություններից մեկնումեկը:

Նշանակենք L_1 և L_2 գծերի երկարությունները l' և l'': Կամայական $x \in L_1$ կետի համար նշանակենք l'_x-ով L_1 գծի այն ամենակարճ «աղեղի» երկարությունը, որով

պետք է շարժվել x_0 կետից L_1-ի երկայնքով ըստ ընտրված ուղղության, որպեսզի հայտնվենք x կետում: Նույնպիսի՝ l''_y նշանակում կատարենք նաև L_2 գծի կամայական y կետի համար: Այժմ L_1-ի ամեն մի x կետի համապատասխանեցնենք L_2 գծի այն միակ y կետը, որի դեպքում $l''_y = \frac{l''}{l'} \cdot l'_x$: Ակնհայտ է, որ $x \mapsto y$ համապատասխանությունը որոշում է հոմեոմորֆիզմ L_1-ի և L_2-ի միջև:

Բերենք նաև տարածական պատկերների հոմեոմորֆության օրինակներ:

Օրինակ 4: Նկար 4-ում պատկերված կիսասֆերան շոշափում է հարթության մաս կազմող նույն շառավղով շրջանին նրա կենտրոնում: Դրանք հոմեոմորֆ պատկերներ են. կիսասֆերայի



յուրաքանչյուր x կետի համապատասխանեցվում է նրա y պրոյեկցիան հարթության վրա և հակառակը՝ շրջանի յուրաքանչյուր y կետի համապատասխանեցվում է կիսասֆերայի այն միակ x կետը, որի պրոյեկցիան y-ն է: Այս համապատասխանությունները որոշում են հոմեոմորֆիզմ նշված պատկերների միջև (նշենք, որ երկու պատկերներն էլ դիտարկվում են կամ իրենց եզրային կետերի հետ միասին, կամ առանց եզրակետերի):

Պարզվում է, որ այդ նույն կիսասֆերան (բայց առանց եզրակետերի) հոմեոմորֆ է հարթությանը: Այս դեպքում (տես նկ. 5-ը) կիսասֆերայի յուրաքանչյուր x կետի համապատասխանեցնելով Ox ուղղի հատման y կետը հարթության հետ, ստանում ենք պահանջվող հոմեոմորֆիզմը:

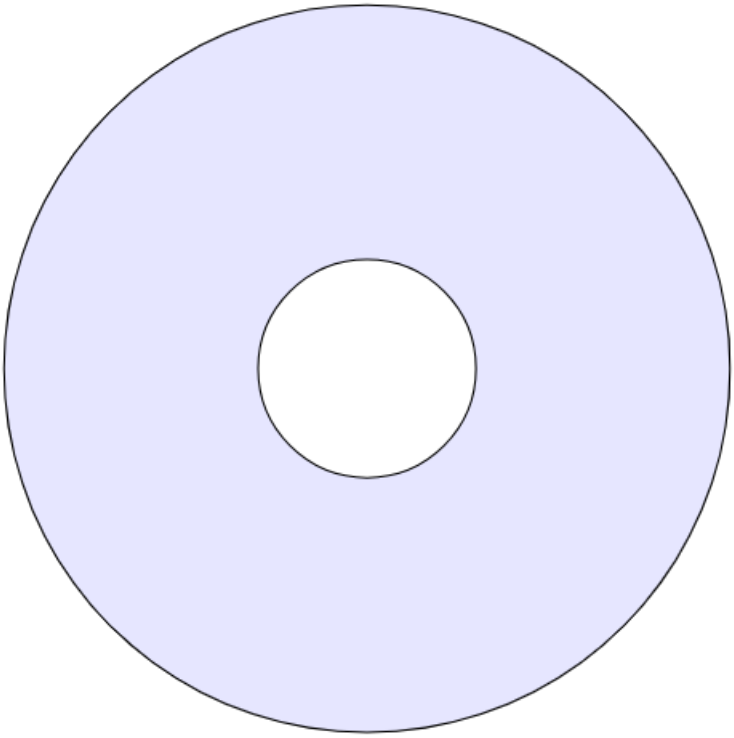
Ավարտելով օրինակների քննարկումը, այժմ լուսաբանենք տոպոլոգիական տոպոլոգիական հատկություն, տոպոլոգիական ինվարիանտ հասկացությունները:

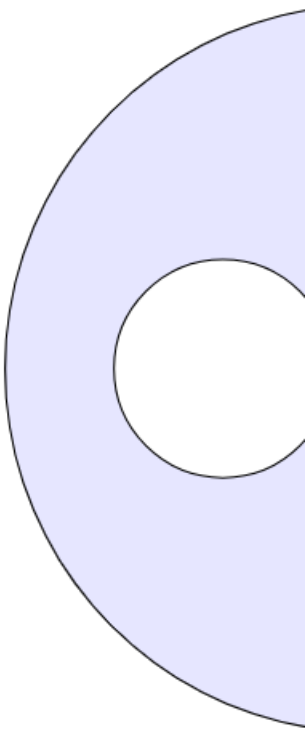
Երկրաչափական պատկերների որևէ հատկություն, կամ պատկերների հետ առնչվող որևէ թվային մեծություն կոչվում է տոպոլոգիական հատկություն կամ տոպոլոգիական ինվարիանտ մեծություն, եթե այն բանից, որ ինչ-որ պատկեր օժտված է այդ հատկությամբ կամ այդ մեծությամբ հետևում է, որ այդ հատկությամբ օժտված են նաև նրան հոմեոմորֆ բոլոր պատկերները:

Վերը քննարկված օրինակները ցույց են տալիս, որ մեզ ծանոթ երկրաչափական հատկությունների և մեծություններից՝ պատկերի ուղղագծություն, պատկերի ուռուցիկություն, պատկերի սահմանափակություն կամ անսահմանափակություն, գծի երկարություն, պատկերի մակերես, և ոչ մեկը տոպոլոգիական հատկություն կամ տոպոլոգիական մեծություն չէ. դրանք չեն պահպանվում պատկերների անընդհատ ձևափոխությունների դեպքում:

Ընթերցողի մոտ կարող է հարց առաջանալ. իսկ կա՞ն արդյոք պատկերների տոպոլոգիական հատկություններ կամ տոպոլոգիական մեծություններ, որո՞նք են և որքա՞ն են դրանք: Այդպիսիք իհարկե կան, և դրանցից որոշների հետ ընթերցողը

կծանոթանա դասընթացում: Այս պահին սահմանափակվենք մի օրինակով. ստորև նկարում





ցուցադրված են պատկերներ, որոնք ստացվում են շրջանից հեռացնելով մեկ, երկու և երեք շրջանակներ: Դրանցից ոչ մի երկուսը միմյանց հոմեոմորֆ չեն. պարզվում է, որ պատկերի անցքերի քանակությունը տոպոլոգիական (անփոփոխ) մեծություն է: Այս, գրեթե ակնհայտ թվացող պնդումը իհարկե կարիք ունի խիստ ապացուցման:

Անցնենք հաջորդ հարցին. ինչպիսի՞ ներքին կամ արտաքին նմանություններ ունեն տոպոլոգիան և դպրոցական դասընթացից մեզ ծանոթ էվկլիդեսյան երկրաչափությունը:

Ինչպես գիտենք, և՛ հարթաչափությունը, և՛ տարածաչափությունը կառուցվում են աքսիոմատիկ եղանակով: Էվկլիդեսյան երկրաչափության հիմքում ընկած են կետ, ուղիղ, հարթություն, կետերի միջև հեռավորություն չսահմանվող հասկացությունները: Փոխարենը սահմանվում են նրանց միջև փոխհարաբերություններ աքսիոմների տեսքով: Հիշեցնենք հարթաչափության մի քանի այդպիսի աքսիոմներ:

1. Յուրաքանչյուր ուղղի պատկանում են առնվազն երկու կետեր:

2. Գոյություն ունեն առնվազն երեք կետեր, որոնք չեն գտնվում մի ուղղի վրա:

3. Ցանկացած երկու կետերով անցնում է ուղիղ և այն էլ միայն մեկը:

Աքսիոմներով են ներմուծվում՝ «կետերիկ միջև», ճառագայթ, կիսահարթություն հասկացությունները և այլն:

Այնուհետև սահմանվում են նոր երկրաչափական հասկացություններ, ձևակերպվում և դեդուկտիվ եղանակով ապացուցվում են թեորեմներ, որոնք բացահայտում են այդ հասկացությունների զանազան հատկություններ:

Տոպոլոգիան որպես երկրաչափության բաժին նույնպես կառուցվում է աքսիոմատիկ եղանակով: Տոպոլոգիան հիմնված է բազմությունների տեսության վրա: Այն նույնպես ունի աքսիոմատիկ կառուցվածք, որի հիմքում ընկած է **բազմության** հասկացությունը:

Նշենք, որ բազմություն և բազմության տարր հասկացությունները նախնական, չսահմանվող հասկացություններ են: Բերենք այդ տեսության մի քանի աքսիոմներ:

1. **Ծավալման աքսիոմ.** եթե A և B բազմությունները կազմված են միևնույն տարրերից, ապա նրանքք համընկնում են:

2. **Գումարի աքսիոմ.** բազմությունների ամեն մի A ընտանիքի համար գոյություն ունի S բազմություն կազմված այն և միայն այն տարրերից, որոնք պատկանում են A ընտանիքի որևէ X բազմությանը:

   Մեկնաբանելով բազմությունների ընտանիք հասկացությունը նշենք, որ բազմությունների ընտանիքը նույնպես բազմություն է, որի տարրերը բազմություններ են:

3. **Դատարկ բազմության գոյության աքսիոմ.** գոյություն ունի այնպիսի բազմություն (նշանակվում է $\varnothing$), որ նրան ոչ մի x տարր չի պարունակում:

4. **Ընտրության աքսիոմ.** ոչ դատարկ, չհատվող բազմությունների ամեն մի A ընտանիքի համար գոյություն ունի B բազմություն, որն ունի ճիշտ մի ընդհանուր տարր A-ին պատկանող ամեն մի X բազմության հետ:

   Այս աքսիոմի անհրաժեշտությունը մեկնաբանելու նպատակով նկատենք, որ ընդհանուր դեպքում գոյություն չունի ժամանակի և տարածության մեջ տեղավորվող որևէ իրական գործնական եղանակ, որով հնարավոր լինի կազմավորել աքսիոմում նշված B բազմությունը:

Վերադառնալով տոպոլոգիայի աքսիոմատիկային՝ նշենք, որ նրա հիմքում ընկած է **տոպոլոգիական տարածության** հասկացությունը: Տոպոլոգիական տարածությունը բազմություն է, որի համար, նույնպես աքսիոմներով, սահմանվում է այդ բազմության որոշակի ներքին կառուցվածք: Այդ կառուցվածքը կոչվում է տվյալ բազմության տոպոլոգիա կամ տոպոլոգիա տվյալ բազմության վրա: Այսպիսով տոպոլոգիա տերմինը գործածվում է երկու իմաստով. որպես տվյալ բազմության ներքին կառուցվածք և որպես մաթեմատիկայի բաժին:

Ամփոփելով նշենք, որ Տոպոլոգիայի (որպես բաժին) աքսիոմների լրիվ համակարգը կազմված է բազմությունների տեսության աքսիոմներից և տոպոլոգիայի (որպես բազմության ներքին կառուցվածքի) աքսիոմներից:

Պատահական չէ, որ բազմությունների տեսության ստեղծման հենց սկզբից նրա հեղինակն ու հետևորդները՝ Գ. Կանտոր, Ֆ. Հաուսդորֆ, Մ. Ֆրեշե, Կ. Կուրատովսկի,

Պ. Ալեքսանդրով և այլոք, ձեռնարկեցին բազմության տոպոլոգիական կառուցվածքի մշակումը: Եղան տարբեր մոտեցումներ:

1. Բազմության տոպոլոգիայի հիմքում դրվեց կետի շրջակայք հասկացությունը իր համապատասխան աքսիոմներով: Սկզբում տոպոլոգիական տարածությունները այդպես էլ կոչվում էին՝ **շրջակայքային տարածություններ**:

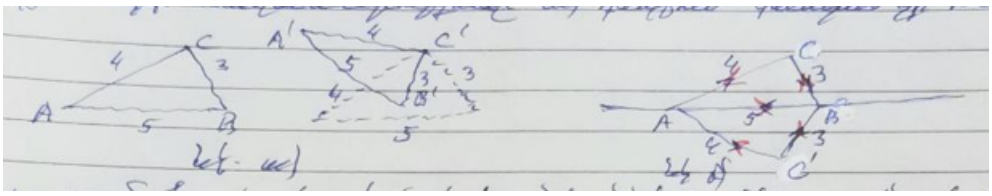
2. Մյուս դեպքում տոպոլոգիայի հիմքում դրվեցին ենթաբազմության հպման կետ, ենթաբազմության փակում հասկացությունները (Կուրատովսկու աքսիոմատիկա):

3. Երրորդ դեպքում տոպոլոգիայի հիմքում դրվեց բազմության կետերի միջև հեռավորության հասկացությունը՝ մետրիկան: Այսպիսի տոպոլոգիական տարածությունները կոչվում են մետրական տարածություններ:

4. Բազմության վրա տոպոլոգիա կարելի է սահմանել նաև ներմուծելով բաց (փակ) ենթաբազմություն հասկացությունը (դարձյալ աքսիոմներով)

Կան նաև այլ մոտեցումներ: Յուրաքանչյուր դեպքում, ըստ ճաշակի և նպատակահարմարության, ընտրվել և վերացարկվել է սովորական երկրաչափական պատկերների այս կամ այլ հատկությունը: Ընդ որում, ընդգրկված բոլոր հատկություններն ունեն անմիջական կապ երկրաչափական պատկերների արտապատկերումների անընդհատության հետ: Նկատենք նաև, որ բոլոր մոտեցումները համարժեք են այն իմաստով, որ բերում են միևնույն արդյունքներին իրենց գործադրությունների տիրույթների ընդհանուր մասերում:

Այժմ բացահայտենք էվկլիդեսյան, ինչպես նաև որոշ այլ երկրաչափությունների և տոպոլոգիայի ներքին նմանությունները: Մասնավորապես պարզաբանենք, թե ինչ տեղ է գրավում տոպոլոգիան այդ երկրաչափությունների շարքում: Հարթության էվկլիդեսյան երկրաչափությունում երկու պատկերները (օրինակ եռանկյունները), կոչվում են հավասար, եթե դրանցից մեկը վերադրումով կարելի է համընկեցնել մյուսի հետ: Ընդ որում համարվում է, որ վերադրման ողջ ընթացքում տեղափոխվող պատկերի ցանկացած երկու կետերի միջև հեռավորությունը մնում է անփոփոխ: Ստորև պատկերված ուղղանկյուն եռանկյունների հավասարությունը ա) դեպքում կասկած չի հարուցում:



Նախ կարելի է եռանկյուններից մեկը, օրինակ ABC-ն ինքն իրեն զուգահեռ տեղափոխելով, նրա C գագաթը համընկեցնել $A'B'C'$ եռանկյան C' գագաթի հետ: Այնուհետև, կատարելով պտույտ C' գագաթի շուրջ որոշ անկյունով համընկեցվում են նաև մյուս երկու գագաթները՝ A-ն A'-ի հետ, B-ն B'-ի հետ: Քանի որ այս գործողությունների ընթացքում ABC եռանկյան ցանկացած երկու կետերի միջև հեռավորությունները

չեն փոխվում, արդյունքում եռանկյուն ABC-ն համադրվում է $A'B'C'$ եռանկյան վրա: Մյուս՝ բ) տարբերակում, առանց հարթությունից դուրս գալու այդպիսի վերադրում իրականացնել հնարավոր չէ: Այս դեպքում ունենք երկու հնարավորություն. կա՛մ պատկերված ABC և ABC' եռանկյունները պետք է համարենք ոչ հավասար, կա՛մ էլ կարող ենք համարել հավասար, եթե մեզ թույլ տանք վերադրելիս դուրս գալ հարթությունից դեպի տարածություն, կատարելով պտույտ AB ուղղի շուրջ $180°$ անկյունով:

Միանգամից ասենք, որ երկու մոտեցումն էլ սկզբունքորեն ընդունելի են, բայց առաջին տարբերակի դեպքում ստացվում են երկու **տարբեր երկրաչափություններ**: Դրանցից առաջինում, երբ ABC և ABC' եռանկյունները համարվում են ոչ հավասար, տեղի չունի եռանկյունների հավասարության հայտանիշը ըստ երեք կողմերի: Այնուամենայնիվ նման հայտանիշ կարելի է ձևակերպել նոր տեսքով. համապատասխանաբար հավասար կողմերով և **միապեսակ կողմնորոշված** եռանկյունները միմյանց հավասար են: Նկատենք, որ բ) նկարում պատկերված ABC և ABC' եռանկյուններն ունեն տարբեր կողմնորոշումներ, այսինքն վազանցումները նրանց պարագծերով (պահելը գագաթների համապատասխանությունը) կատարվում են տարբեր ուղղություններով. ABC եռանկյան դեպքում՝ ժամ. սլաքին հակառակ ուղղությամբ, իսկ ABC' եռանկյան դեպքում ժամ. սլաքի ուղղությամբ:

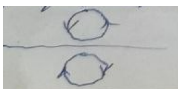
Ամփոփելով վերը շարադրվածը կատարենք երկու դիտողություն:

1. Կախված նրանից, թե ինչպիսի ձևափոխություններ են թույլատրվում պատկերների հավասարություն սահմանելիս, կարող են գոյանալ տարբեր երկրաչափություններ: Հենց նոր տեսանք, որ գոյություն ունի հարթության առնվազն երկու երկրաչափություն՝ կողմնորոշված պատկերների հարթաչափություն և չկողմնորոշված պատկերների հարթաչափություն (սովորական էվկլիդեսյան հարթաչափություն):

2. Էվկլիդեսյան հարթաչափությունում ABC և ABC' եռանկյունների հավասարությունը վերադրումով հիմնավորելու համար ստիպված եղանք դուրս գալ հարթությունից: Մինչդեռ ցանկալի է, որ հարթաչափությունը լինի ինքնաբավ, այսինքն ձևավորվի սեփական տիրույթում առանց դիմելու տարածության օգնությանը: Դա կարելի է անել ներմուծելով պատկերների իզոմետրիկ ձևափոխություն հասկացությունը:

Դիցուք ունենք X և Y երկու պատկերներ, որոնք կետերի միջև հաստատված է փոխմիարժեք $x \mapsto y$ համապատասխանություն այնպես, որ պահպանվում են կետերի միջև հեռավորությունները. այսինքն կամայական $x_1, x_2 \in X$ կետերի դեպքում, եթե $x_1 \mapsto y_1$, $x_2 \mapsto y_2$, որտեղ $y_1, y_2 \in Y$, ապա x_1 և x_2 կետերի միջև $\rho(x_1, x_2)$ հեռավորությունը հավասար է y_1 և y_2 կետերի միջև $\rho(y_1, y_2)$ հեռավորությանը: Ամեն մի այդպիսի ձևափոխություն կոչվում է հարթության իզոմետրիկ ձևափոխություն:

Իզոմետրիկ ձևափոխություններ են հարթության զուգահեռ տեղափոխությունները, կետերի շուրջ պտույտները, ուղիղների նկատմամբ համաչափությունները: Տեղի է նկատել, որ ի տարբերություն զուգահեռ տեղափոխությունների և պտույտների, ուղղի նկատմամբ համաչափությունը փոխում է պատկերը կողմնորոշումը:



Պարզվում է, որ թվարկված ձևափոխություններով սպառվում են հարթության մեջ բոլոր իզոմետրիկ ձևափոխությունները հետևյալ իմաստով. հարթության ամեն մի իզոմետրիկ ձևափոխություն կամ զուգահեռ տեղափոխություն է ինչ-որ վեկտորով, կամ պտույտ է ինչ-որ կետի շուրջ ինչ-որ անկյունով, կամ համաչափություն է ինչ-որ ուղղի նկատմամբ և կամ էլ մի քանի այդպիսի ձևափոխությունների համադրույթ է (այսինքն ձևափոխությունների հաջորդական կիրառման արդյունք է):

Իզոմետրիկ ձևափոխությունները օժտված են հետևյալ կարևոր հատկություններով:

1. Ցանկացած պատկերի նույնական ձևափոխությունը իզոմետրիկ ձևափոխություն է: Նույնական կոչվում է այն ձևափոխությունը, որը յուրաքանչյուր կետի համապատասխանեցն է այդ նույն կետը $x \Longrightarrow x$:

2. Ցանկացած պատկերի (այդ թվում հարթության) ցանկացած քանակով իզոմետրիկ ձևափոխությունների համադրույթը իզոմետրիկ ձևափոխություն է:

3. Յուրաքանչյուր իզոմետրիկ h ձևափոխության համար գոյություն ունի նրան հակադարձ h^{-1} ձևափոխություն որը նույնպես իզոմետրիկ ձևափոխություն է (ըստ սահմանման, $x \to y$ ձևափոխության հակադարձ կոչվում է $y \to x$ ձևափոխությունը):

Իրոք, $\overrightarrow{a}$ վեկտորով զուգահեռ տեղափոխության հակադարձը $-\overrightarrow{a}$ վեկտորով զուգահեռ տեղափոխությունն է: O կետի շուրջ ϕ անկյունով պտույտի հակադարձը O կետի շուրջ $-\phi$ անկյունով (այսինքն հակառակ ուղղությամբ բայց նույն մեծությամբ անկյունով) պտույտն է: Որևէ ուղղի նկատմամբ համաչափության հակադարձը այդ նույն համաչափությունն է: Վերջապես, եթե h_1, h_2-ը իզոմետրիկ ձևափոխություններ են, ապա նախ կատարելով h_1 ձևափոխությունը և ապա h_2 ձևափոխությունը ստանում ենք իզոմետրիկ ձևափոխություն (նշանակվում է $h1 \circ h_2$), որի հակադարձը $h1^{-1} \circ h_2^{-1}$ իզոմետրիկ ձևափոխությունն է:

Եթե ինչ-որ պատկերի (մասնավորապես հարթության կամ տարածության) որոշ ձևափոխություններից կազմված G բազմության տարրերը բավարարում են 1-3 պայմաններին, ապա ասում են որ G-ն տվյալ պատկերի ձևափոխությունների խումբ է:

Այսպիսով հարթության բոլոր իզոմետրիկ ձևափոխությունները կազմում են խումբ, որն ընդունված է նշանակել $O(2)$:

Համեմատության համար քննարկենք մյուս՝ հարթության կողմնորոշված պատկերների երկրաչափությունը: Այս երկրաչափության հիմքում ընկած են պատկերների (մասնավորապես հարթության) այդ բոլոր իզոմետրիկ ձևափոխությունները, որոնք պահպանում են դրանց կողմորոշումը: Դրանք են՝ զուգահեռ տեղափոխությունները, կետերի շուրջ պտույտները և դրանց բոլոր համաչափությունները: Սրանք նույնպես կազմում են ձևափոխությունների խումբ: Այդ խումբը կոչվում է հարթության հատուկ (կամ առաջին

սեռի) իզոմետրիկ ձևափոխությունների խումբ և նշանակվում է $SO(2)$: Այս խումբը կոչվում է $O(2)$ խմբի մաս (ենթախումբ): Նրանում բացակայում են համաչափությունները ուղիղների նկատմամբ: Որպես հետևանք առաջանում են որոշ տարբերություններ $SO(2)$ և $O(2)$ խմբերի երկրաչափությունների միջը: I. $SO(2)$ խմբի երկրաչափությունում երկրաչափական պատկերների տեսականին ավելի հարուստ է: Իրոք, այն դեպքում երբ ABC և ABC' եռանկյունները նույնն են (հավասար են) $O(2)$ խմբի երկրաչափությունում, դրանք տարբեր են (հավասար չեն) $SO(2)$ խմբի երկրաչափությունում: Բացի այդ, եթե $O(2)$ խմբի դեպքում անկյունը միարժեքորեն որոշվում է կետով և նրանից դուրս եկով երկու a և b ճառագայթներով, ապա $SO(2)$ խմբի դեպքում մենք ունենք երկու տարբեր անկյուններ՝ a-ից մինչև b ընկած անկյուն և b-ից մինչև a ընկած անկյուն, որոնք որպես պատկերներ նույնը չեն: Փոխելով շեշտադրումը նույն միտքը կարող ենք ձևակերպել նաև այսպես. տվյալ երկրաչափության ձևափոխություն-ների խումբն ընդլայնելիս առաջանում է նոր երկրաչափություն, բայց երկրաչափական պատկերների ավելի աղքատիկ տեսականիով:

II. Ձևափոխությունների խումբն ընդլայնելիս որոշ չափով քչանում են (նախկինի համեմատ) նաև երկրաչափական հատկությունները: Տվյալ դեպքում խոսքը պատկերի կողմնորոշման մասին է: Պատկերը կողմնորոշելու հնարավորությունը (կամ դրա անհնարությունը) իրականում շատ կարևոր երկրաչափական հատկություններ են (օրինակ մարդիկ թե ներքին թե արտաքին կառուցվածքով ունեն որոշակի աջ կամ ձախ կողմնորոշում): Քանի որ հարթության մեջ ուղղի նկատմամը, իսկ տարածության մեջ հարթության նկատմամբ համաչափությունները փոխում են պատկերի կողմորոշումը, ուստի $O(2)$ խմբի երկրաչափությունում այդ դադարում է լինել երկրաչափական հատկություն:

Այժմ կարող ենք սահմանել Էվկլիդեսյան հարթաչափությունում պատկերի հավասարություն, առանց այդ պատկերները հարթությունից դուրս բերելու. երկու X և Y պատկերներ կոչվում են հավասար, եթե գոյություն ունի հարթության իզոմետրիկ ձևափոխություն, որը X պատկերը ձևափոխում է Y պատկերին: Մի փոքր այլ ձևակերպումով դա հնչում է այսպես. X և Y պատկերները հավասար են եթե գոյություն ունի $O(2)$ խմբի h տարր, որ $h(X) = Y$:

Այս սահմանումից և իզոմետրիկ ձևափոխությունների 1-3 հատկություններից ստացվում են պատկերների հավասարության հետևյալ հատկությունները.

1'. ամեն մի պատկերը հավասար է ինքն իրեն

2'. Եթե X պատկերը հավասար է Y պատկերին, իսկ Y պատկերը հավասար է Z պատկերին, ապա X-ը հավասար է Z-ին:

3'. Եթե X պատկերը հավասար է Y պատկերին, ապա Y-ը հավասար է X-ին:

Այնուհետև, պատկերների որևէ հատկություն (պատկերների հետ առնչվող որևէ թվային մեծություն) կոչվում է երկրաչափական հատկություն (երկրաչափական մեծություն) Էվկլիդեսյան հարթաչափությունում, եթե այն բանից որ այդ հատկությամբ (մեծությամբ)

օժտված է որևէ X պատկեր, հետևում է, որ այդ հատկությամբ (մեծությամբ) օժտված են X-ին հավասար բոլոր պատկերները:

Այլ կերպ ասած երկրաչափական են այն հատկություններն ու մեծությունները, որոնք կայուն են, չեն փոխվում երբ պատկերը ենթարկվում է իզոմետրիկ ձևափոխությունների: Այսպիսով Էվկլիդեսյան երկրաչափությունում իզոմետրիկ ձևափոխությունները որոշիչ դեր են խաղում: Այս հանգամանքը ի նկատի ունենալով, հաճախ Էվկլիդեսյան երկրաչափությունը անվանում են ձևափոխությունների $O(2)$ խմբի երկրաչափություն: Այս երկրաչափությունում երկրաչափական հատկություններ են պատկերի ուղղագծությունը (ի նկատի ունենք որ պատկերի կետերը շարված են որևէ ուղղի վրա); ուղիղներով կազմած անկյունը, գծերի, հատվածների երկարությունները, պատկերների մակերեսները, անկյան մեծությունը, բազմանկյան կողմերի քանակը և այլն:

Որպեսզի ավելի ակնառու լինի երկրաչափական պատկերների և երկրաչափական հատկություններո դինամիկան կապված ձևափոխությունների խմբի փոփոխության հետ, քննարկենք ձևափոխությունների ևս մի խմբի և նրանով որոշված երկրաչափության օրինակ:

Այդ երկրաչափությունը սահմանային տեսքով (առանց այդ մասին հատուկ պարզաբանումների) դիտարկվում է միջնակարգ դպրոցի երկրաչափության դասընթացում, որպես օգտակար մեթոդ ստանալու համար, օրինակ որոշ չափական առընչություններ ուղղանկյուն եռանկյան էջերի, ներքնաձիգի, ներքնաձիգին տարված բարձրության և ներքնաձիգի հատվածների միջը: Դա այսպես կոչված նմանության հատկությունն է:

Այս երկրաչափության հիմքում ընկած է հարթության նմանության ձևափոխությունների խումբը: Հարթության ձևափոխությունը կոչվում է $k > 0$ գործակցով նմանության ձևափոխություն, եթե կամայական x_1, x_2 կետերի և նրանց y_1, y_2 կերպարների դեպքում տեղի ունի $\rho(y_1, y_2) = k{\cdot}\rho(x_1, x_2)$ հավասարություն: Մասնավոր դեպքում, երբ $k = 1$ ստացվում է $\rho(x_1, x_2) = \rho(y_1, y_2)$ այսինքն հարթության իզոմետրիկ ձևափոխությունները նմանության ձևափոխություններ են: Հարթության ամեն մի O կետի և $k > 0$ թվի համար սահմանվում է մի հատուկ նմանության ձևափոխություն: Այն կոչվում է հարթության հոմոտետիա O կենտրոնով և k գործակցով, նշանակվում է H_k^o և սահմանվում է որպես $\overrightarrow{Ox'} = R \cdot \overrightarrow{Ox}$ որտեղ x-ը հարթության կամայական կետ է, իսկ x'-ը՝ նրա կերպարը: Հեշտությամբ ցույց է տրվում որ.

1. ցանկացած H_k^o հոմոտետիա նմանության ձևափոխություն է k գործակցով;

2. ցանկացած k գործակցով նմանության ձևափոխություն կարող է ներկայացվել որպես որևէ իզոմետրիկ ձևափոխության և որևէ H_k^o հոմոտետիայի համադրույթ;

3. ցանկացած երկու k_1 և k_2 գործակիցներով նմանության ձևափոխությունների համադրույթը նմանության ձևափոխություն է k_2k_1 գործակցով;

4. ցանկացած k գործակցով նմանության ձևափոխության համար գոյություն ունի նրան հակադարձ ձևափոխություն. որը նմանության ձևափոխություն է $\frac{1}{k}$ գործակցով

Վերջապես, քանի որ հարթության նույնական ձևափոխությունը նույնպես ձևափոխություն է ($k = 1$ գործակցով), ուստի հարթության բոլոր նմանության ձևափոխությունները կազմում են ձևափոխությունների խումբ, որը նշանակվում է $H(2)$: Այն իր մեջ ընդգրկում է իզոմետրիկ ձևափոխությունների $O(2)$ խումբը որպես ենթախումբ: Այսպիսով ունենք խմբերի և նրանց ներդրումների այսպիսի շղթա $SO(2) \in O(2) \in H(2)$

նմանության երկրաչափությունում երկու M և N պատկերներ համարվում են վերադրումով համատեղվող (կամ պարզապես նման), եթե գոյություն ունի նմանության ձևափոխություն որը M-ը ձևափոխում է (արտապատկերում է) N-ին: Այս դեպքում նպատակահարմար չէ համատեղվող պատկերները համարել հավասար, քանի որ $k \neq 1$ դեպքում նմանության ձևափոխությունը փոխում է պատկերի չափսերը, մեծացնելով կամ փոքրացնելով դրանք k անգամ:

Ուստի նպատակահարմար է համատեղվող պատկերներ համար գործածել համարժեք կամ կոնգուենտ տերմինները, իսկ պատկերի հավասարության տերմինը գործածել այն դեպքում երբ դրանք նույնն են:

Այսպիսով $H2$ խմբի երկրաչափությունում երկու պատկերներ միմյանց համարժեք են այն և միայն այն դեպքում երբ նրանք նման պատկերներ են: Այս իմաստով միմյանց համարժեք են բոլոր (a, b) ինտերվալները, բոլոր $[a, b]$ հատվածները, բոլոր կանոնավոր եռանկյունները, բոլոր քառակուսիները, բոլոր շրջանագծերը և այլն:

Ստացվում է այդպես, որ բոլոր, օրինակ շրջանագծերը, միասին վերցրած հանդես են գալիս որպես մի նորագայություն, որպես մի նոր տեսակի երկրաչափական պատկեր $H(2)$ խմբի երկրաչափությունում: Այդ պատկերն ընդունված է անվանել շրջանագծերը համարժեքության դաս: Նույնը տեղի է ունենում բոլոր կանոնավոր եռանկյունների, բոլոր քառակուսիների, և ընդհանրապես՝ բոլոր միմյանց նման պատկերների դեպքում: Սա նման է նրան, երբ մի քանի պետություններ, ելնելով որոշ ընդհանրություններից և շահերից միավորվում են դաշինքների կամ ընդհանուր պետության մեջ,

չձուլվելով միմյանց:

Այն բանից հետո, երբ հստակվեցին հավասար և համարժեք պատկերների հատկությունները (հավասարները նաև համարժեք են, բայց համարժեքները կարող են հավասար չլինել), անդրադառնալով I և II դիտողություններին, տեսնում ենք որ դրանցում պետք է կատարել ճշգրտումներ:

I': ABC և ABC' եռանկյունները ոչ միայն տարբեր են, այլ նաև համարժեք չեն $SO(2)$ խմբի երկրաչափությունում:

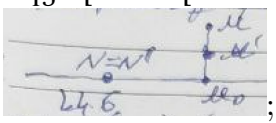
II': Ձևափոխությունների խումբն ընդլայնելիս նախկին երկրաչափական պատկերներն ու երկրաչափական հատկությունները չեն քչանում: Դրանք ինչպես կային, այդպես էլ մնում են: Պարզապես գոյանում է նոր երկրաչափություն նոր պատկերներով, որոնք ձևավորվում են հին պատկերներից համարժեքության դասերի տեսքով: Նոր պատկերների երկրաչափական հատկությունները նույնպես ձևավորվում են հինգ պատկերների երկրաչափական հատկություններից: Դրանք այդ հատկություններն

են որոնք չեն փոխվում նաև ավելացվող ձևափոխությունների դեպքում:

Մասնավորապես ձևափոխությունների $H(2)$ խմբի երկրաչափությունում անիմաստ է խոսել շրջանագծերի դասի շառավղի մասին, շրջնանների դասի մակերեսի մասին, էլիպսների որևէ դասի կիսառանցքների մասին, քանի որ դրանք չեն պահպանվում նմանության բոլոր ձևափոխությունների դեպքում: Բայց կարելի է խոսել նման էլիպսների ցանկացած դասի էքսցենտրիսիտետի մասին, քանի որ միմյանց նման բոլոր էլիպսները ունեն միևնույն էքսցենտրիսիտետը:

Նշենք, որ երկրաչափությունների հաջորդականությունը չի ավարտվում քննարկված երեք երկրաչափություններով: Սովորավար վերլուծական երկրաչափության քիչ թե շատ լիարժեք դասընթացում դիտարկվում է ևս մի երկրաչափություն՝ աֆինական երկրաչափությունը:

Աֆինական երկրաչափության հիմքում ընկած է հարթության աֆինական ձևափոխությունների խումբը, որն իր մեջ որպես ենթախումբ ընդգրկում է նմանության ձևափոխությունների $H(2)$ խումբը: Ձևափոխությունների խմբի ընդլայնումը տեղի է ունենում այսպես կոչված՝ ուղիղների նկատմամբ սեղմումների:

Հարթության սեղմում $k > 0$ գործակցով սևեռված l ուղղի նկատմամբ կոչվում է այն ձևափոխությունը, որի դեպքում 

;

ա) l ուղղի կետերը մնում են անշարժ, բ) կամայական M կետի M' կերպարը որոշվում է $\overrightarrow{M_0M'} = k \cdot \overrightarrow{M_0M}$ պայմանով, որտեղ M_0-ն M կետի պրոյեկցիան է l ուղղի վրա (նկ. 6-ում պատկերված է $k = \frac{1}{2}$ դեպքը):

Հարթության աֆինական ձևափոխությունները գոյանում են նմանության ձևափոխություններից, ուղիղների նկատմամբ սեղմումներից և դրանց համադրույթներից:

Նշենք, որ աֆինական երկրաչափությունում բոլոր էլիպսները, անկախ նրանց կիսառանցքների երկարություններից, համարժեք են միմյանց և կազմում են մի համարժեքության դաս՝ էլիպսների դաս: Այս նոր երկրաչափական պատկերի համար, հասկանալի պատճառով, իմաստազրկվում է էքսցենտրիսիտետ հասկացությունը:

Ամփոփենք. որքան ավելի է ընդլայնվում ձևափոխությունների խումբը, այնքան ավելի են շատանում միմյանց համարժեք երկրաչափական պատկերները համարժեքության դասերում: Դրա հետ կապված՝ նույնքան դժվարանում է համարժեքության նոր դասերի համար երկրաչափական հատկությունների որոնումը:

Ի վերջո առաջանում է երկու հարց. 1. Գոյություն ունի՞ արդյոք մի վերջին, այսպես կոչված սահմանային երկրաչափություն, որով ավարտվում է երկրաչափությունների այս հաջորդականությունը 2. Պատկերների ո՞ր երկրաչափական հատկություններն են բնորոշ սահմանային երկարության պատկերներին (համարժեքության դասերին):

Արդեն իսկ դիտարկված ձևափոխությունների հատկությունների համեմատումը ցույց է տալիս, որ ձևափոխությունների խումբն ընդլայնելիս 1. ավելացող (նոր) ձևափոխություններն ավելի «լիբերալ են» նախորդներից, այսինք ավելի թույլ պահանջներ են դնում պատկերների համարժեքության համար:

2. Բոլոր հին և նոր ձևափոխությունները ունեն մի ընդհանուր հատկություն՝

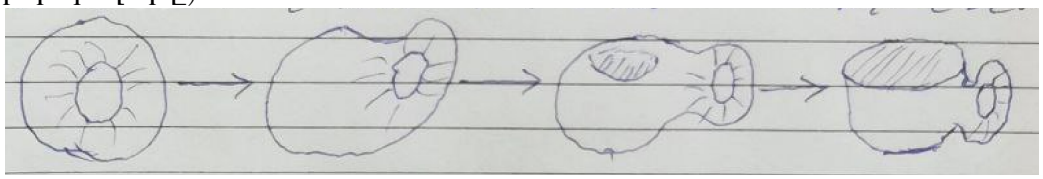
փոխմիարժեք և անընդհատ են

Ուստի բնական կլինի սահմանային երկրաչափական ձևափոխություններից միայն պահանջել, որ նրանք լինեն փոխմիարժեք և անընդհատ:

Այժմ վերադառնալով թեմայի սկզբին պարզ է դառնում, որ ստացվող սահմանային երկրաչափությունը տոպոլոգիա է: Տեսնում ենք նաև, որ 1-3 նկարներում պատկերված գծապատկերները, ինչպես նաև 5 նկարում պատկերները, տոպոլոգորեն համարժեք են. դրանցից ցանկացած երկուսը կարող են ստացվել մեկը մյուսից ենթարկելով անընդհատ ձևափոխությունների:

Երբեմն, պատկերավորության համար ասում են, որ տոպոլոգիայում երկու պատկերները համարժեք են, եթե նրանցից մեկը կարող է ստացվել մյուսից ձգելով, սեղմելով, ծռելով, բայց առանց պոկելու, ջարդելու կամ կտրելու:

Երբեմն, ավելի հեռուն են գնում հայտարարելով, որ տոպոլոգի համար (տոպոլոգ անվանում են տոպոլոգիայով զվաղվողներին) նույնն են տոպոլոգորեն համարժեք պատկերները (մասնավորապես նույնն են ստորև պատկերված թխվածքաբլիթն ու սուրճի գավաթը):



Այս նույն տրամաբանությամբ ասում են նաև, որ տոպոլոգիան ռետինային կամ էլաստիկ երկրաչափություն է:

Վերջին հարց, արդյո՞ք տոպոլոգիայով վերջանում են երկրաչափությունները: Բնավ ոչ. ընդհանուր կամ տեսաբազմական տոպոլոգիային հաջորդեց հոմոտոպիական տոպոլոգիան: Այս տոպոլոգիայում հոմեոմորֆիզմների դեր կատարում են այսպես կոչված հոմոտոպիական համարժեքությունները: Ի տարբերություն հոմեոմորֆիզմների, համատոպիական համարժեքությունները որպես արտապատկերումներ կարող են չլինել փոխմիարժեք համապատասխանություններ:

Նշենք, որ կան նաև երկրաչափություններ, որոնք չեն սահմանվում աքսիոմատիկ եղանակով, օրինակ՝ դիֆերենցիալ, ռիմանյան, հանրահաշվական երկրաչափությունները